TÍNH CHÍNH QUY METRIC CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Phùng Xuân Lễ
Trường Đại học Phú Yên
Email: phungxuanle@pyu.edu.vn
Ngày nhận bài: 24/05/2022; Ngày nhận đăng: 17/06/2022

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một số kết quả quan trọng liên quan đến tính chính quy metric của ánh xạ đa trị. Các kết quả này đã được đưa ra bởi các tác giả, Huỳnh Văn Ngãi, Nguyễn Hữu Trọn, và Michel Théra. Tuy nhiên, hầu hết chứng minh vắn tắt hoặc không chứng minh. Ở đây, chúng tôi trình bày với chứng minh chặt chẽ và chi tiết.

Từ khóa: *tính chính quy metric, ánh xạ đa trị, hàm ẩn đa trị, giải tích đa trị.*

Metric regularity of set – valued mappings

Phung Xuan Le
Phu Yen University
Received: May 24, 2022; Accepted: June 17, 2022

Abstract

In this paper, we present some results related to ***Metric regularity of Set – Valued Mappings****. These results have been reported by, Huynh Van Ngai., Nguyen Huu Tron., and Thera, M. However, most of them were not proved in full detail. Herein, we present them with the detail in proof.*

Keywords: *Metric regularity, set – valued mappings, implicit multifunction, set – valued analysis.*

1. Đặt vấn đề

Khái niệm chính quy metric là một khái niệm quan trọng trong Giải tích Biến phân hiện đại. Những năm gần đây, với sự phát triển của Giải tích không trơn và Giải tích biến phân, lý thuyết chính quy metric cho ánh xạ đa trị đã đạt được nhiều thành tựu quan trọng cả về mặt lý thuyết và ứng dụng. Đặc biệt, tính chính quy metric được xem như một công cụ mạnh để nghiên cứu các bài toán quan trọng như bài toán điều khiển, điều kiện cần tối ưu, định lý hàm ẩn, bài toán ổn định. Ngoài ra, nó còn đóng vai trò chính trong phân tích sự hội tụ của một số thuật toán, chẳng hạn như thuật toán kiểu Newton.

2. Các khái niệm và định lý

2.1. Một số khái niệm cơ sở

Trong phần này, tác giả trình bày các kiến thức cơ sở liên quan đến chứng minh các phần sau, chúng ta có thể tìm thấy trong (Aubin & Frankowska, 1990; Yên, 2007).

Định nghĩa 2.1.1 (Aubin & Frankowska, 1990). Cho X là không gian metric và hàm $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Ta ký hiệu $domf := \{x \in X : f(x) < +\infty\}$ là miền hữu hiệu của f.

a) Hàm f được gọi là *nửa liên tục dưới* tại $\overline{x} \in domf$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U của $\overline{x}$ sao cho

$$f(x) \geq f(\overline{x}) - \varepsilon, \quad \forall x \in U.$$

b) Hàm f được gọi là *nửa liên tục trên* tại $\overline{x} \in domf$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại lân cận U của $\overline{x}$ sao cho

$$f(x) \leq f(\overline{x}) + \varepsilon, \quad \forall x \in U.$$

Ví dụ 2.1.2. Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} & \text{khi } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0. \end{cases}$$

Khi đó, hàm f là nửa liên tục trên tại những điểm $x < 0$, nửa liên tục dưới tại những điểm $x > 0$ nhưng không nửa liên tục dưới tại $x = 0$. Vậy f không liên tục tại $x = 0$.

Chú ý 2.1.3. Nếu X là không gian metric thì điều kiện (a) trong định nghĩa trên có thể viết dưới dạng

$$\liminf_{x \to \overline{x}} f(x) \geq f(\overline{x}),$$

trong đó

$$\liminf_{x \to \overline{x}} f(x) := \inf\left\{\gamma \in \mathbb{R} : \exists x_k \to \overline{x},\ \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \gamma\right\}.$$

Tương tự, điều kiện điều kiện (b) trong định nghĩa trên có thể viết dưới dạng

$$\limsup_{x \to \overline{x}} f(x) \leq f(\overline{x}),$$

trong đó

$$\limsup_{x \to \overline{x}} f(x) := \sup\left\{\gamma \in \mathbb{R} : \exists x_k \to \overline{x},\ \lim_{k \to \infty} f(x_k) = \gamma\right\}.$$

Định nghĩa 2.1.4. (Aubin & Frankowska, 1990) *Độ dốc mạnh* $|\nabla f|(x)$ của hàm nửa liên tục dưới f tại $x \in domf$ được định nghĩa bởi $|\nabla f|(x) = 0$ nếu x là cực tiểu địa phương của f. Hơn nữa,

$$|\nabla f|(x) = \limsup_{y \to x} \frac{f(x) - f(y)}{d(x, y)}.$$

Ví dụ 2.1.5. Cho hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{khi } x < 0, \\ 2x & \text{khi } x \geq 0. \end{cases}$$

Khi đó, $|\nabla f|(0) = 1$.

Định nghĩa 2.1.6. (Aubin & Frankowska, 1990) Cho X, Y là hai tập hợp bất kỳ. Ánh xạ $F : X \to 2^Y$ cho tương ứng mỗi $x \in X$, $F(x)$ là một tập hợp con của Y được gọi là ánh xạ đa trị từ X vào Y.

Định nghĩa 2.1.7. (Yên, 2007) Đồ thị $gphF$ và miền hữu hiệu $domF$ của ánh xạ đa trị $F: X \to 2^Y$ xác định tương ứng bằng các công thức sau:

$$gphF = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\},$$
$$domF = \{x \in X : F(x) \neq \varnothing\}.$$

Định nghĩa 2.1.8. (Yên, 2007) Cho $F: X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị từ không gian topo X vào không gian topo Y. F được gọi là *nửa liên tục dưới* tại $\overline{x} \in domF$ nếu với mọi tập mở $V \subset Y$ thỏa mãn $F(\overline{x}) \cap V \neq \varnothing$ tồn tại lân cận mở U của $\overline{x}$ sao cho $F(x) \cap V \neq \varnothing$ với mọi $x \in U \cap domF$.

Định nghĩa 2.1.9. (Aubin & Frankowska, 1990) Cho X, Y là các không gian metric. Ánh xạ $F: X \to 2^Y$ được gọi là *chính quy metric* tại $\overline{x}$ ứng với $\overline{y}$ nếu $\overline{y} \in F(\overline{x})$ và có hằng số $\kappa \geq 0$ cùng lân cận U của $\overline{x}$ và lân cận V của $\overline{y}$ sao cho

$$d\left(x, F^{-1}(y)\right) \leq \kappa d\left(y, F(x)\right) \text{ với mọi } (x, y) \in U \times V.$$

Ví dụ 2.1.10. Cho hàm $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \{-2x, 1\}$ chính quy metric tại $(0,0)$.

2.2. Tính chính quy metric của ánh xạ đa trị

Phần này, tác giả trình bày một số kết quả quan trọng về tính chính quy metric của ánh xạ đa trị.

Định lý 2.2.1 (Ngai, Tron, & Thera, 2011). *Cho X là không gian metric đầy đủ và Y là không gian metric. Cho P là không gian topo và ánh xạ đa trị $F: X \times P \to 2^Y$ thỏa các điều kiện sau đối với $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{p}) \in X \times Y \times P$:*

$a)$ $\overline{x} \in S(\overline{y}, \overline{p})$;

$b)$ Hàm đa trị $p \to 2^{F(\overline{x},p)}$ là nửa liên tục dưới tại $\overline{p}$;

$c)$ Bất kỳ p gần $\overline{p}$, ánh xạ đa trị $x \to 2^{F(x,p)}$ là hàm đa trị đóng.

Cho $\tau \in (0, +\infty)$ cố định. Khi đó, các khẳng định sau là tương đương:

(i) Tồn tại lân cận $V \times W \subseteq X \times P$ của $(\overline{x}, \overline{p})$ sao cho $V \cap S(\overline{y}, \overline{p}) \neq \varnothing$ với bất kỳ $p \in W$ và $d\left(x, S(\overline{y}, p)\right) \leq \tau d\left(\overline{y}, F(x, y)\right)$ với mọi $(x, p) \in V \times W$;

(ii) Tồn tại lân cận $V \times W \subseteq X \times P$ của $(\overline{x}, \overline{p})$ sao cho $V \cap S(\overline{y}, \overline{p}) \neq \varnothing$ với bất kỳ $p \in W$ và $d\left(x, S(\overline{y}, p)\right) \leq \tau \varphi_p\left(\overline{y}, F(x, y)\right)$ với mọi $(x, p) \in V \times W$;

(iii) Tồn tại lân cận $V \times W \subseteq X \times P$ của $(\overline{x}, \overline{p})$ sao cho bất kỳ $(x, p) \in V \times W$ với $\overline{y} \notin F(x, p)$ và $\varepsilon > 0$, bất kỳ dãy $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ hội tụ đến x với

$$\limsup_{n \to +\infty} d\left(\overline{y}, F(x_n, p)\right) \leq d\left(\overline{y}, F(x, p)\right),$$

tồn tại dãy $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ với $\lim\limits_{n \to +\infty} d(u_n, x) > 0$ sao cho

$$\limsup_{n\to+\infty}\frac{d\left(\overline{y},F\left(x_n,p\right)\right)-d\left(\overline{y},F\left(u_n,p\right)\right)}{d\left(x_n,u_n\right)}>\frac{1}{\tau+\varepsilon};\qquad(2.1)$$

(iv) *Tồn tại lân cận* $V\times W\subseteq X\times P$ *của* $(\overline{x},\overline{p})$ *và số thực* $\gamma\in(0;+\infty)$ *sao cho với bất kỳ* $(x,p)\in V\times W$ *và* $\varphi_p(\overline{x},\overline{y})<\gamma$ *và bất kỳ* $\varepsilon>0,$ *khi đó với bất kỳ dãy* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ *hội tụ đến* x *với*

$$\lim_{n\to+\infty}d\left(\overline{y},F\left(x_n,p\right)\right)=\liminf_{n\to+\infty}d\left(\overline{y},F\left(u,p\right)\right),$$

ta có thể tìm được dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ *với* $\lim_{n\to+\infty}d\left(u_n,x\right)>0$ *để* (2.1) *đúng.*

Chứng minh. $(i)\Rightarrow(iii)$, lấy $V\times W$ là lân cận của $(\overline{x},\overline{y})$ sao cho $gphF(.,p)$ là đóng với $p\in P$ và

$$d\left(x,\mathrm{S}(\overline{y},p)\right)\le\tau d\left(\overline{y},F\left(x,p\right)\right)\text{ với mọi }(x,p)\in V\times W.$$

Lấy $(x,p)\in V\times W$, $\overline{y}\notin F(x,p)$ và $\varepsilon>0.$ Lấy dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ hội tụ đến x.

Khi $n\ge n_0$ đủ lớn thì $x_n\in V$ và $\overline{y}\notin F(x_n,p)$. Do đó,

Với $n\ge n_0$, chọn $u_n\in S(\overline{y},p)$ sao cho $d(x_n,u_n)\le\left(1+\frac{\varepsilon}{2\tau}\right)\times d\left(x_n,S(\overline{y},p)\right).$

Giả sử tồn tại $\lim_{n\to+\infty}d(x_n,u_n)$, do tính đóng của $gphF(.,p)$ ta có $\lim_{n\to+\infty}d(x_n,u_n)>0.$

Hơn nữa, với $n\ge n_0$

$$\begin{aligned}d(x_n,u_n)&<\left(1+\frac{\varepsilon}{2\tau}\right)\times d\left(x_n,S(\overline{y},p)\right)\\&\le\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\times\left[d\left(\overline{y},F(x_n,p)\right)-d\left(\overline{y},F(u_n,p)\right)\right].\end{aligned}$$

Suy ra

$$\frac{d\left(\overline{y},F\left(x_n,p\right)\right)-d\left(\overline{y},F\left(u_n,p\right)\right)}{d\left(x_n,u_n\right)}>\frac{1}{\tau+\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Vậy (2.1) đúng.

Chứng minh $(iii)\Rightarrow(iv)$. Từ (iii), tồn tại lân cận $V\times W\subseteq X\times P$ của $(\overline{x},\overline{p})$ sao cho bất kỳ $(x,p)\in V\times W$ với $\overline{y}\notin F(x,p)$ và $\varepsilon>0$, bất kỳ dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ hội tụ đến x với

$$\limsup_{n\to+\infty}d\left(\overline{y},F\left(x_n,p\right)\right)\le d\left(\overline{y},F\left(x,p\right)\right).$$

Mặt khác, với bất kỳ dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ hội tụ đến x ta có

$$\lim_{n\to+\infty}d\left(\overline{y},F\left(x_n,p\right)\right)=\liminf_{n\to+\infty}d\left(\overline{y},F\left(u,p\right)\right).$$

Vậy (iv) được chứng minh.

Chứng minh $(ii) \Rightarrow (i)$. Đặt

$$\varphi_p(x,\bar{y}) = \lim_{(u,v)\to(x,\bar{y})} \inf d(v,F(u,p)) = \liminf_{u\to x} d(\bar{y},F(u,p)).$$

Theo (ii), tồn tại lân cận $V\times W \subseteq X\times P$ của $(\bar{x},\bar{p})$ sao cho $V\cap S(\bar{y},\bar{p})\neq\varnothing$ với bất kỳ $p\in W$ và $d(x,S(\bar{y},p)) \le \tau\varphi_p(\bar{y},F(x,y))$ với mọi $(x,p)\in V\times W$. Do đó, ta có

$$d(x,S(\bar{y},p)) \le \tau d(\bar{y},F(x,y)) \text{ với mọi } (x,p)\in V\times W.$$

Vậy (i) được chứng minh.

Chứng minh $(iv)\Rightarrow(ii)$. Vì hàm đa trị $p\to 2^{F(\bar{x},p)}$ là nửa liên tục dưới tại $\bar{p}$ nên hàm $p\mapsto d(\bar{y},F(\bar{x},p))$ là nửa liên tục dưới tại $\bar{p}$. Do đó,

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\varphi_p(\bar{x},\bar{y}) \le \lim_{n\to+\infty}\sup d(\bar{y},F(\bar{x},p)) \le d(\bar{y},F(\bar{x},\bar{p})) = \varphi_{\bar{p}}(\bar{x},\bar{y}).$$

Điều này chứng tỏ $p\mapsto\varphi_p(\bar{x},\bar{y})$ nửa liên tục dưới tại $\bar{p}$.

Cho $(x,p)\in V\times W$, $\bar{y}\notin F(x,p)$, $\varphi_p(x,\bar{y})<\gamma$ và $\varepsilon>0$. Cho dãy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ hội tụ đến x với

$$\lim_{n\to+\infty} d(\bar{y},F(x_n,p)) = \varphi_p(x,\bar{y}).$$

Theo (iv), tồn tại dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ với $\lim_{n\to+\infty} d(u_n,x)>0$ sao cho

$$\lim_{n\to+\infty}\sup\frac{d(\bar{y},F(x_n,p))-d(\bar{y},F(u_n,p))}{d(x_n,u_n)} > \frac{1}{\tau+\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\sup\frac{\varphi_p(x,\bar{y})-\varphi_p(u_n,\bar{y})}{d(x,u_n)} > \frac{1}{\tau+\varepsilon}.$$

Do đó, ta được điều cần phải chứng minh.

Định lý sau đưa ra tính chính quy metric của hàm ẩn đa trị bằng cách sử dụng độ dốc mạnh của bao hàm nửa liên tục dưới $x\mapsto\varphi_p(x,y)$.

Định lý 2.2.2 (Ngai, Tron, & Thera, 2011). *Cho X là không gian metric đầy đủ, Y là không gian metric và P là không gian topo. Giả sử ánh xạ đa trị $F: X\times P\to 2^Y$ thỏa các điều kiện (a), (b), (c) trong định lý 2.2.1 xung quanh $(\bar{x},\bar{y},\bar{p})\in gphF$. Cho $m>0$, nếu tồn tại lân cận $V\times W\times U$ của $(\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ và số thực $\gamma>0$ sao cho*

$$\left|\nabla_{\varphi_p}(.,y)\right|(x)\ge m,\ \forall(x,p,y)\in V\times W\times U \text{ và } \varphi_p(x,y)\in(0,\gamma),\quad(2.2)$$

thì tồn tại lân cận $\tilde{V}\times\tilde{W}\times\tilde{U}$ của $(\bar{x},\bar{p},\bar{y})$ sao cho

$$d(x,F_p^{-1}(y)) \le d(y,F(x,p))/m,\ \forall(x,p,y)\in\tilde{V}\times\tilde{W}\times\tilde{U}.\qquad(2.3)$$

Hơn nữa, chiều ngược lại cũng đúng nếu Y là không gian tuyến tính định chuẩn.

Chứng minh. Từ định lý 2.2.1, ta có được chiều suy ra. Bây giờ, ta chứng minh chiều ngược lại. Giả sử Y là không gian tuyến tính định chuẩn. Cho $r>0$ và một lân cận W của

$\overline{p}$ sao cho

$$d\left(x,F_p^{-1}(y)\right)\le d\left(y,F(x,p)\right)/m,\ \forall(x,p,y)\in B(\overline{x},2r)\times W\times B(\overline{y},2r).$$

Cho $(x,p,y)\in B(\overline{x},r)\times W\times B(\overline{y},r)$ *với* $y\notin F(x,p);\ \varphi_p(x,y)<r$. Dãy $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq X$ sao cho

$$d(u_n,x)<n^{-1}\varphi_p(x,y);\ d\left(y,F(u_n,p)\right)\le\left(1+\frac{1}{n}\right).\varphi_p(x,y), \qquad (2.4)$$

Với mỗi $n\in\mathbb{N}^*$ tồn tại $y_n\in F(u_n,p)$ sao cho

$$d\left(y,F(u_n,p)\right)\le\|y-y_n\|<\left(1+\frac{1}{n}\right)d\left(y,F(u_n,p)\right).$$

Đặt

$$z_n:=\frac{1+n^{1/2}}{n+1}y+\frac{n\left(1-n^{-1/2}\right)}{n+1}y_n.$$

Ta có

$$\begin{aligned}\|y_n-z_n\|=\frac{n\left(1-n^{-1/2}\right)}{n+1}\|y-y_n\|&<\frac{n\left(1-n^{-1/2}\right)}{n+1}\left(1+n^{-1}\right)d\left(y,F(u_n,p)\right)\\&=\left(1-n^{-1/2}\right)d\left(y,F(u_n,p)\right)\\&<\left(1-n^{-1/2}\right)\left(1+n^{-1}\right)\varphi_p(x,y)\\&\le\left(1-n^{-1/2}\right)\left(1+n^{-1/2}\right)\varphi_p(x,y)\\&=\left(1-n^{-1}\right)\varphi_p(x,y).\end{aligned}$$

Do đó, $z_n\notin F(u_n,p)$ và $\|z_n-\overline{y}\|\le\|y-\overline{y}\|+\|y-z_n\|<2r$ khi n đủ lớn. Vì vậy, ta chọn $x_n\in F_p^{-1}(z_n)$ sao cho

$$\begin{aligned}d(u_n,x_n)&<\left(1+n^{-1/2}\right)d\left(u_n,F_p^{-1}(z_n)\right)\le\left(1+n^{-1/2}\right)d\left(z_n,F(u_n,p)\right)/m\\&\le\left(1+n^{-1/2}\right)\left(1+n^{1/2}\right)(n+1)^{-1}\|y-y_n\|/m. \qquad (2.5)\end{aligned}$$

Suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty}d(x,x_n)=0$. Với n đủ lớn, ta có

$$\begin{aligned}\varphi_p(x,y)-\varphi_p(x_n,y)&\ge\frac{n}{n+1}\left(d\left(y,F(u_n,p)\right)-d\left(y,F(x_n,p)\right)\right)\\&>\frac{n}{n+1}\left(\left(1+n^{-1}\right)^{-1}-\left(1-n^{-1/2}\right)\right)\|y-y_n\|\\&=\frac{n^{1/2}\left(1-n^{-1/2}+n^{-1}\right)}{(n+1)\left(1+n^{-1}\right)}\|y-y_n\|. \qquad (2.6)\end{aligned}$$

Từ (2.4), (2.5), (2.6) ta có

$$\frac{\varphi_p(x,y)-\varphi_p(x_n,y)}{d(x,x_n)} \geq \frac{\varphi_p(x,y)-\varphi_p(x_n,y)}{d(x,x_n)+d(x,x_n)}$$
$$> \frac{mn^{1/2}\left(1-n^{-1/2}+n^{-1}\right)\|y-y_n\|}{n^{-2}\left(n^{-1}+1\right)^2 r+\left(1+n^{-1}\right)\left(1+n^{1/2}\right)\|y-y_n\|}.$$

Vì

$$\lim_{n\to+\infty}\|y-y_n\| = \lim_{n\to+\infty} d\left(y,F(u_n,p)\right) = \varphi_p(x,y) > 0,$$

nên

$$\left|\nabla_{\varphi_p}(.,y)\right|(x) \geq \lim_{n\to+\infty}\inf \frac{\varphi_p(x,y)-\varphi_p(x_n,y)}{d(x,x_n)} \geq m.$$

Vậy định lý được chứng minh.

3. Kết luận

Bài báo này, đã thực hiện được các vấn đề sau:

Chứng minh chi tiết các kết quả, định lý 2.2.1 và định lý 2.2.2.

Định lý 2.2.1, mô tả tính chính quy của hàm ẩn đa trị.

Định lý 2.2.2, đưa ra tính chính quy metric của hàm ẩn đa trị bằng cách sử dụng độ dốc mạnh của bao hàm nửa liên tục dưới $x \mapsto \varphi_p(x,y)$.❑

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Aubin, J. P., Frankowska, H. (1990) *Set-valued Analysis*, Springer, Berlin.

Huynh Van Ngai, Nguyen Huu Tron, and Michel Théra. (2011). *Metric regularity of* the sum of *multifunctions* and *applications,* Math. Prog.

Hoang Tuy. (1997). *Convex Analyis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers.

Nguyễn Đông Yên. (2007). *Giải tích đa trị*, NXB Khoa học Tự nhiên và Công nghệ.